Examen Final de Topología Elemental (24 de enero de 2020) (3º-t1)

Apellidos y Nombre	

1. Sean (X, d_X) e (Y, d_Y) dos espacios métricos. Se considera $\rho : (X \times Y) \times (X \times Y) \to \mathbb{R}$ la aplicación que, para $(x_1, y_1), (x_2, y_2) \in X \times Y$, está definida por:

$$\rho((x_1, y_1), (x_2, y_2)) = \text{máx}\{d_X(x_1, x_2), d_Y(y_1, y_2)\}.$$

- Comprobar que ρ es un métrica sobre $X \times Y$.
- Calcular las bolas abiertas de cualquier centro y cualquier radio.
- Demostrar que la topología τ_ρ, inducida por ρ, es la topología producto $\tau_{d_X} \times \tau_{d_Y}$.

(2 ptos.)

2. Se considera en $\mathbb{R}^2$ la topología producto $\tau_{[,)} \times \tau_{[,)}$, donde $\tau_{[,)}$ denota la topología de Sorgenfrey de $\mathbb{R}$.

- Calcular la topología inducida en cada recta del plano.
- Demostrar que este espacio es IAN y separable, pero no IIAN ni de Lindelöf.
- Caracterizar las sucesiones convergentes en este espacio en términos de las sucesiones convergentes en $\mathbb{R}^2$ con la topología usual.
- Mostrar que $(\mathbb{R}^2, \tau_{[,)} \times \tau_{[,)})$ es totalmente disconexo.

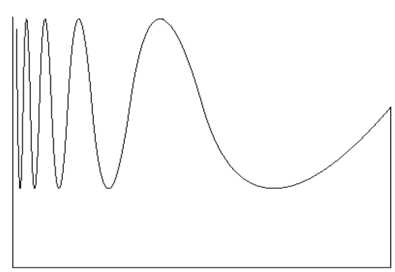
(3 ptos.)

3. • Demostrar que un subespacio compacto de un espacio T_2 debe ser cerrado.

- Poner un ejemplo que muestre que el resultado anterior no es cierto, en general, si sustituimos "compacto" por "Lindelöf".

(2 ptos.)

4. **Círculo Polaco**. Sea X el subespacio de $(\mathbb{R}^2, \tau_u)$ formado por la unión de los conjuntos $A = \{0\} \times [-2, 1]$, $B = [0, 4] \times \{-2\}$, $C = \{4\} \times [-2, 0]$ y $D = \{(x, y) : y = \text{sen}(4\pi/x), 0 < x \leq 4\}$.



- Probar que X es compacto y conexo por caminos.
- Determinar algún conjunto infinito numerable $Z \subset X$ tal que $X - Z$ sea conexo.
- Demostrar que X no es homeomorfo a $S^1 = \{(x, y) : x^2 + y^2 = 1\}$.

(3 ptos.)

Examen Final de Topología Elemental (11 de septiembre de 2020) (3º-t1)

Apellidos y Nombre	

1. Para $(a,b)\in\mathbb{R}^2$ y $r>0$, se define el conjunto $G_{a,b,r}$ como:
$$G_{a,b,r}=\{(a,b)\}\cup\Big((a-r,a+r)\times(b-r,b+r)\cap\mathbb{Q}\times\mathbb{Q}\Big).$$
Se considera en $\mathbb{R}^2$ la familia $\mathcal{B}=\{G_{a,b,r}:\ (a,b)\in\mathbb{R}^2, r>0\}$.

- Probar que $\mathcal{B}$ genera una topología $\tau_{\mathcal{B}}$ en $\mathbb{R}^2$, más fina que la usual.
- Calcular la clausura de cada conjunto $G_{a,b,r}$.
- Determinar la topología inducida sobre los conjuntos:
$$A=\{(x,y): x=\sqrt{2}\}\qquad B=\{(x,y): x=2\}.$$
- ¿Es $\tau_{\mathcal{B}}$ una topología producto?
- Estudiar los axiomas de numerabilidad de este espacio topológico.

(4.5ptos.)

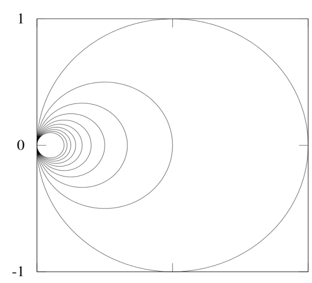
2. **Teorema de Sierpinski**: *Todo espacio métrico numerable sin puntos aislados es homeomorfo a* $\mathbb{Q}$ (el espacio de los racionales con la topología usual).

Utilizando este resultado (que no hay que demostrar), probar que:

- Todo subespacio denso y numerable de $(\mathbb{R},\tau_u)$ es homeomorfo a $\mathbb{Q}$.
- Dotados de la topología usual, son homeomorfos $\mathbb{Q}$ y $\mathbb{Q}^2$.

(2ptos.)

3. **Pendiente-Hawaiano**. Sea X el subespacio de $(\mathbb{R}^2,\tau_u)$ formado por la unión de las circunferencias de centro $(1/n,0)$ y de radio $1/n$, para cada $n\in\mathbb{N}$. Es decir,
$$X=\bigcup_{n=1}^{\infty}\left\{(x,y):\ (x-1/n)^2+y^2=(1/n)^2\right\}$$



- Probar que X es compacto y conexo.
- Demostrar que X no puede ser homeomorfo a ningún subespacio de $(\mathbb{R},\tau_u)$.
- Probar que $X-\{(0,0)\}$ no es compacto ni conexo.
- Explicar cómo definir un homeomorfismo entre $X-\{(0,0)\}$ y el subespacio A de $(\mathbb{R},\tau_u)$ formado por la unión de los intervalos $(2n,2n+1)$, $n=0,1,....$ Es decir,
$$A=\bigcup_{n=0}^{\infty}(2n,2n{+}1).$$

(3.5ptos.)